试卷类型：公共课

姓名：________ 考生号：________ 座号：________

密 封 线

湖南普通高等教育专升本统一考试

高等数学试题（一）

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分，共 6 页。满分 100 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自已的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸修正带。不按以上要求等作的答案无效。

第 I 卷

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$， $g(x)=1-x$，则 $f\left[g(x)\right]=$（　　）

A. $\dfrac{x}{1-x}$　　B. $\dfrac{1}{x}$　　C. $\dfrac{2x-1}{1-x}$　　D. $2+x$

【答案】A

【解析】直接代入法， $f\left[g(x)\right]=f(1-x)=\dfrac{1-(1-x)}{1-x}=\dfrac{x}{1-x}$，故选 A.

2. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 是（　　）

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 不确定

【答案】B

【解析】$\dfrac{1-x}{1+x}>0\Rightarrow -1<x<1$，即函数的定义域关于原点对称，

$f(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

3. 当 $x\to 0$ 时， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=c$，则 c 的值（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$， $c=2$，选 B.

4. 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）

A. 1　　B. ∞　　C. $f(0)$　　D. 0

【答案】C

【解析】由连续性的定义， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

5. 若 $f(u)$ 可导，且 $y=f(2^x)$，则 $dy=$（　　）

A. $f'(2^x)dx$　　B. $f'(2^x)d2^x$　　C. $\left[f(2^x)\right]'d2^x$　　D. $f'(2^x)2^x dx$

【答案】B

【解析】$dy=df(2^x)=f'(2^x)d2^x=f'(2^x)\cdot 2^x\cdot\ln 2dx$.

6. 曲线 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 0\\ 1+\sin x, & x<0\end{cases}$，在点 $(0,1)$ 处的切线斜率是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【解析】由于 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x+1-1}{x}=1$，

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{1+\sin x-1}{x}=1$，故 $f'(0)=1$，故应选 B.

7．下列积分可以用牛顿-莱布尼茨公式进行计算的是（　　）

A. $\int_0^2 xe^x dx$　　B. $\int_0^2 \frac{1}{1-x}dx$

C. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx$　　D. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1-x^2}dx$

【答案】A

【解析】 B 中 $x=1$ 为瑕点，C 中 $x=1$ 为瑕点 ，D 中 $x=\pm 1$ 为瑕点

8. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{5x}=1$，则 b 的值是（　　）

A. 5　　B. 1　　C. 0　　D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin bx}{5x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{5x}=1$，$b=5$

9. 定积分 $\int_0^1(2x+k)dx=2$，则 k 的值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. −1　　D. 2

【答案】B

【解析】

$\int_0^1(2x+k)dx=2$，$(x^2+kx)|_0^1=2$，$(1^2+k)-(0^2+0)=2$，$k=1$

10. 二元函数 $z=2x^2+xy^3$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）

A. $4x$　　B. $2y$　　C. $3y^2$　　D. $3x^2$

【答案】C

【解析】 $z=2x^2+xy^3$ 则 $\frac{\partial z}{\partial}=4x+y^3$

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2$

第 II 卷

二、填空题（本大题共 5 小题，每空 4 分，共 20 分）

11. 已知 $f(x)=\begin{cases} ae^x+1, & x<0 \\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

【答案】1

【解析】函数在 $x=0$ 处连续，则该点处左、右极限存在且相等，还等于该点处的函数值，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ae^x+1)=a+1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$，所以 $a+1=2$，即 $a=1$.

12. 设 $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{\ln(3-x^2-y^2)}$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}f(x,y)=$______.

【答案】$\dfrac{2}{\ln 2}$

【解析】函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 连续，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{2x+y}{\ln(3-x^2-y^2)}=\dfrac{2\cdot 1+0}{\ln(3-1-0)}=\dfrac{2}{\ln 2}$.

13. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^5\cos x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx=$______.

【答案】0

【解析】因为 $\dfrac{x^5\cos x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是奇函数，由奇函数在对称区间上的积分性质可得

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^5\cos x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx=0$.

14．设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域是______.

【答案】$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

【解析】$\begin{cases}0\le x+\frac{1}{4}\le 1\\0\le x-\frac{1}{4}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$.

15．若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln x$，则 $f'(x)=$______.

【答案】$-\frac{1}{x^2}$

【解析】因为 $f(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

三、计算（本大题共 5 小题，每题 10 分，共 50 分）

16．计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}$.

【答案】2

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3+n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=2$.

17．求不定积分 $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

【答案】$x-\tan\frac{x}{2}+C$

【解析】$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int dx-\int\frac{1}{1+\cos x}dx=x-\frac{1}{2}\int\sec^2\frac{x}{2}dx=x-\int\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=x-\tan\frac{x}{2}+C$.

18．求定积分 $\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

【答案】$2(\sqrt{3}-1)$

【解析】$\int_1^{e^2}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}d(1+\ln x)=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^2}=2(\sqrt{3}-1)$.

19．求由方程 $y\sin x+\ln y=2$ 所确定的隐函数的导数 y'.

【答案】$-\frac{y^2\cos x}{y\sin x+1}$

【解析】$y'\sin x+y\cos x+\frac{1}{y}\cdot y'=0$，$y'=-\frac{y^2\cos x}{y\sin x+1}$.

20．计算由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 围成的平面图形的面积.

【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】联立方程得交点 $(0,0)$，$(2,4)$，故所围图形的面积 $S=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.