姓名:________ 考生号:________ 座号:________

密 封 线



试卷类型：公共课

# 湖南普通高等教育专升本统一考试

# 高等数学试题（二）

**本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分，共 6 页。满分 100 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。**

**注意事项：**

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自已的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2. 第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在本试卷上无效。

3. 第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸修正带。不按以上要求作答的答案无效。

## 第 I 卷

**一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）**

1. 函数 $y=\sqrt{4+x}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域是（　　）

A. $[-4,+\infty)$　　B. $(-4,+\infty)$

C. $[-4,0)\cup(0,+\infty)$　　D. $(-4,0)\cup(0,+\infty)$

【答案】C

【解析】要使函数 $f(x)$ 有意义，则需 $\begin{cases}4+x\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$，即 $x\geq -4$，且 $x\neq 0$，故应选 C .

2. 下列函数为偶函数的是（　　）

A. $y=x^2+\log_3(1-x)$　　B. $y=x\sin x$

C. $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$　　D. $y=e^x$

【答案】B

【解析】对于 B，有 $y(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=y(x)$， $y(x)$ 为偶函数，故应选 B.

3. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中与 $\ln(1+2x)$ 等价的是（　　）

A. $x$　　B. $\frac{1}{2}x$　　C. $x^2$　　D. $2x$

【答案】D

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{2x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时， $2x$ 与 $\ln(1+2x)$ 等价，故应选 D.

4. 设函数 $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}$， 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

【答案】D

【解析】由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右极限均不存在，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，故应选 D.

5. 函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　B. 间断

C. 连续但不可导　　D. 连续且可导

【答案】C

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0=f(0)$，故 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续，又由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 不存在，故 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导，故应选 C.

6. 若函数 $y=f(u)$ 可导，$u=e^x$，则 $dy=$（　　）

A. $f'(e^x)dx$　　B. $f'(e^x)de^x$

C. $f'(x)e^x dx$　　D. $\left[f(e^x)\right]' de^x$

【答案】B

【解析】由一阶微分形式不变性可知，$dy=df(u)=f'(u)du=f'(e^x)de^x$，故应选 B.

7. 已知 $f(x)=\ln x$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x)}{2h}=$（　　）

A. $-\dfrac{\ln x}{x^2}$　　B. $\dfrac{\ln x}{x}$　　C. $-\dfrac{1}{x^2}$　　D. $\dfrac{1}{x}$

【答案】B

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x+h)+f(x)]\cdot[f(x+h)-f(x)]}{2h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\dfrac{f(x+h)+f(x)}{2}=f'(x)\cdot f(x)$.

由于 $f(x)=\ln x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故原式 $=\dfrac{\ln x}{x}$，故选 B.

8. 曲线 $\begin{cases} y=\sin t \\ x=2\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数）在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处切线的方程为（　　）

A. $x=1$　　B. $y=1$　　C. $y=x+1$　　D. $y=x-1$

【答案】B

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{-2\sin t}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=0$，当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=1$，则切线方程为 $y=1$，故应选 B.

9. 函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，则方程 $f'(x)=0$ 实根的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】C

【解析】$f(x)$ 在 $[0,4]$ 上连续，在 $(0,4)$ 内可导，且知 $f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$，$[1,2]$，$[2,3]$，$[3,4]$ 均满足罗尔定理条件，可知至少存在 $\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(1,2)$，$\xi_3\in(2,3)$，$\xi_4\in(3,4)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=f'(\xi_4)=0$，又知 $f(x)$ 为 5 次多项式，$f'(x)$ 为 4 次多项式，故最多有 4 个零点，综上可得，$f'(x)=0$ 实根的个数为 4 个，故应选 C.

10. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=xy+e^x$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　　）

A. $\dfrac{1+x-y}{1-x}$　　B. $\dfrac{2y-xy}{1-x}$

C. $\dfrac{1+y}{1-x}$　　D. $-\dfrac{1-x}{2x-xy}$

【答案】B

【解析】将方程 $y=xy+e^x$ 两边对 $x$ 求导，其中 $y$ 为 $x$ 的函数，则有 $y'=y+xy'+e^x$，即 $y'=\dfrac{y+e^x}{1-x}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+e^x}{1-x}=\dfrac{y+y-xy}{1-x}=\dfrac{2y-xy}{1-x}$，故应选 B.

## 第 II 卷

**二、填空题（本大题共 5 小题，每空 4 分，共 20 分）**

11. 已知 $f(x-1)=x^2-x$，则 $f(\sqrt{x})=$________.

【答案】$x+\sqrt{x}$

【解析】由 $f(x-1)=x^2-x=(x-1+1)^2-(x-1+1)$，得

$f(x)=(x+1)^2-(x+1)=x^2+x$，故 $f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}=x+\sqrt{x}$.

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{t}\right)^t(x\neq 0)$，则 $f(\ln 2)=$________.

【答案】4

【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{t}\right)^t=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{t}\right)^{\frac{t}{2x}\cdot 2x}=e^{2x}$，故 $f(\ln 2)=e^{2\ln 2}=4$.

13. 如果函数 $f(x)$ 在点 $a$ 处可导，且 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值，则 $f'(a)=$________.

【答案】0

【解析】由题显然可得 $f'(a)=0$.

14. 曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点是________.

【答案】$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

【解析】$y'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$，$y''=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$，令 $y''=0$ 得 $x=2$，当 $x<2$ 时，$y''<0$，当 $x>2$ 时，$y''>0$，故 $y=xe^{-x}$ 的拐点为 $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$.

15. 不定积分 $\int\frac{1}{x(x^2-1)}dx=$________.

【答案】$\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|-\ln|x|+C$

【解析】$\int\frac{1}{x(x^2-1)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|-\ln|x|+C$.

## 三、计算（本大题共 5 小题，每题 10 分，共 50 分）

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}$.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{e^{x^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$.

17. 已知参数方程 $\begin{cases}x=a(1-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$（$t$ 为参数），求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【答案】$\frac{1}{a}\sec^3 t$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{-a\cos t}=-\tan t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-a\cos t}=\frac{1}{a}\sec^3 t$.

18. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x+1}}dx$.

【答案】$2(\sqrt{x+1}-1)e^{\sqrt{x+1}}+C$

【解析】令 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，且 $dx=2tdt$，

故 $\int e^{\sqrt{x+1}}dx=2\int te^t dt=2\int tde^t=2te^t-2\int e^t dt=2(t-1)e^t+C=2(\sqrt{x+1}-1)e^{\sqrt{x+1}}+C$.

19. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt$.

【答案】$-1$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{-x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}e^{x^2}=-1$.

20. 求函数 $z(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+10$ 的极值.

【答案】极大值为 $z(3,-2)=35$

【解析】由$\begin{cases} z_x=-2x+6=0 \\ z_y=3y^2-12=0 \end{cases}$，解得驻点为$(3,2)$，$(3,-2)$，而$z_{xx}=-2$，$z_{xy}=0$，$z_{yy}=6y$，

对于驻点$(3,2)$，$A=-2$，$B=0$，$C=12$，所以$B^2-AC=24>0$，点$(3,2)$不是函数的极值点；

对于驻点$(3,-2)$，$A=-2$，$B=0$，$C=-12$，所以$B^2-AC=-24<0$，点$(3,-2)$是函数的极值点，又$A<0$，点$(3,-2)$是函数的极大值点，所以极大值为$z(3,-2)=35$.