姓名:________ 考生号:________ 座号:________

密 封 线

试卷类型：公共课

湖南专升本全真模拟试卷

高等数学（二）

本试卷分为第 I 卷和第 II 卷两部分，共 8 页。满分 100 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

1．答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、考生号、座号填写到试卷规定的位置上，并将姓名、考生号、座号填（涂）在答题卡规定的位置。

2．第 I 卷每小题选出答案后，用 2B 笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在本试卷上无效。

3．第 II 卷答题必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸修正带。不按以上要求等作的答案无效。

第 I 卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1．

【答案】A

【解析】 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$.

2．

【答案】C

【解析】因为 $\sqrt{\ln(x-1)}$ ，所以 $\ln(x-1)\geq 0$ ， $x\geq 2$ ．故选 C.

3．

【答案】D

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$ ， $f(x)$ 在这一点连续， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$ ， $f(x)$ 在这一点可导.

4．

【答案】B

【解析】 $y'=(\sqrt{1-x^2})'-\left(2\sin\dfrac{\pi}{5}\right)'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ，故选 B.

5．

【答案】A

【解析】方程两边对 y 求导，其中 x 看作 y 的函数， $x'y+x=e^{x+y}(x'+1)$ ，所以 $x'=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{e^{x+y}-x}{y-e^{x+y}}=\dfrac{x(y-1)}{y(1-x)}$ ，故选 A.

6．

【答案】C

【解析】当 $x\to 0$ 时， $(1+x^2)^k-1\sim kx^2$ ， $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ ，根据等价无穷小传递性，有 $k=\dfrac{1}{2}$.

7．

【答案】C

【解析】罗尔定理条件有三个：① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；② $f(x)$ 在 (a,b) 内可导；③ $f(a)=f(b)$ ．A 不满足①， $\ln x^2$ 在 $x=0$ 处不连续；B 不满足②， $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导；C 满足罗尔定理得条件；D 不满①、②和③.

8．

【答案】B

【解析】函数 $f(x)$ 在定义域内连续可导，且 $f(0)=f(-1)=f(-3)=0$ ，故由罗尔定理可得存在两点 $\xi_1\in(-1,0)$ ， $\xi_2\in(-3,-1)$ ，使得 $f'(\xi_1)=0$ ， $f'(\xi_2)=0$ ，因此 $f'(x)=0$ 有 2 个根.

9．

【答案】C

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$， $\lim\limits_{x\to0^-}x\cos x=0$， 即 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$， 则 $x=0$ 是跳跃间断点.

10.

【答案】A

【解析】一阶导数大于 0 为增函数，二阶导数小于 0 为凸函数，综上选 A.

第 II 卷

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。请把正确答案填在横线上）

11.

【答案】 $2x-4y+\pi-2=0$

【解析】切线的斜率 $k=y'\big|_{x=1}=\dfrac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=1}=\dfrac{1}{2}$， 故所求的切线方程为 $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$，

即 $2x-4y+\pi-2=0$.

12.

【答案】 $y=\dfrac{1}{3}\ln x$

【解析】 $y=e^{3x}\Rightarrow3x=\ln y\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\ln y\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}\ln x$.

13.

【答案】 e^2

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2+x}\right)^{(2+x)\cdot\frac{1}{2+x}\cdot2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2+x}}=e^2$.

14.

【答案】 -1

【解析】 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]$， 故

$y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$， 可得 $y'(0)=-1$.

15.

【答案】 -2

【解析】 $\dfrac{dx}{dt}=-1-\sin t$， $\dfrac{dy}{dt}=e^t+\cos t$， 从而 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t+\cos t}{-1-\sin t}$， 故 $\dfrac{dy}{dx}\bigg|_{t=0}=-2$.

16.

【答案】1

【解析】 $f'(x)=2x+2$，由拉格朗日中值定理得 $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$，即 $2\xi+2=4$，解得 $\xi=1$.

17.

【答案】1

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$.

18.

【答案】 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$

【解析】定义域 $[0,+\infty)$， $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$， 令 $f'(x)<0$， 解得 $0<x<\dfrac{1}{4}$.

19.

【答案】2

【解析】函数在某点处连续的充要条件为函数值等于极限值， $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$， 故 $F(0)=f(0)=2$.

20.

【答案】2

【解析】 $y=x^3-27x+2$， $y'=3x^2-27=3(x^2-9)$， 因为 $x\in[0,1]$， 所以 $y'<0$， 从而函数在 $[0,1]$ 上单调递减，故最大值为 $y(0)=2$.

三、计算题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分）

21.

【答案】 $-e^{-x}\arctan e^{x}$

【解析】 $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2}{1+e^{2x}}-1+(-e^{-x})\arctan e^{x}+e^{-x}\cdot\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}=-e^{-x}\arctan e^{x}$.

22.

【答案】（1）单调增区间为 $(-1,1)$；单调减区间为 $(-\infty,-1)$， $(1,+\infty)$；极大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$；极小值为 $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$；（2）最大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，最小值为 $f(0)=0$

【解析】（1）定义域为 $(-\infty,+\infty)$， $f'(x)=(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$，令 $f'(x)=0$， $x=1$， $x=-1$，

x	$(-\infty,-1)$	1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	单调减	极小	单调增	极大	单调减

单调增区间为 $(-1,1)$；单调减区间为 $(-\infty,-1)$， $(1,+\infty)$；极大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$；极小值为 $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$；（2） $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$， $f(0)=0$， $f(2)=\frac{2}{e^2}$，所以最大值为 $f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$，最小值为 $f(0)=0$.

23.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$.

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分）

24.

【证明】令 $F(x)=\frac{x}{f(x)}$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $F(a)=\frac{a}{f(a)}=1$， $F(b)=\frac{b}{f(b)}=1$，由罗尔定理知，至少存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，又 $f^2(\xi)\neq 0$，即 $f(\xi)=\xi\cdot f'(\xi)$.

25.【证明】令 $f(x)=\ln x$， $x\in[b,a]$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，故由拉格朗日中值公式可得存在一点 $\xi\in(b,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}$，又有 $b<\xi<a$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，故 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}<\frac{1}{b}$，即 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.